

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
18 februarie 2012

Clasa a V-a

1. a. Se dau mulțimile  $A = \{n^2 / n \in \mathbb{N}\}$  și  $B = \{5n + 8 / n \in \mathbb{N}\}$ . Calculați  $A \cap B$ .

b. Câte numere de forma  $\overline{ab1}$  există?

7 puncte

2. a. Aflați ultima cifră a numărului  $n$ ,

$$n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2011}$$

b. Să se calculeze suma tuturor numerelor de forma  $\overline{abab}$ , știind că  $\overline{ab} - \overline{ba} = a + 3b$

7 puncte

3. Scrieți numărul  $a=2009$  ca sumă de două pătrate perfecte.

7 puncte

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore*

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
18 februarie 2012

Clasa a VI-a

1. a. Există numere naturale  $m$  și  $n$  astfel încât  $\frac{4m}{3n+3} = \frac{2m-1}{2n}$  ?

b. Determinați  $a, b \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $(a+3)^b = a^2 + 2^b$

\*\*\*

7 puncte

2. Câte triunghiuri cu laturile de lungimi numere naturale există, știind că oricare dintre ele are o singură latură de lungime strict mai mare ca 4?

7 puncte

3. Fie semidreptele  $[OA, [OX, [OB, [OC, [OY$  și  $[OD$  în această ordine, astfel încât  $m(\angle AOD) = 8 \cdot m(\angle BOC)$ ,  $m(\angle BOX) = 9 \cdot m(\angle AOX)$ ,  $m(\angle YOC) = 9 \cdot m(\angle DOY)$ .

Calculați  $\frac{m(\angle XOY)}{m(\angle BOC)}$ .

7 puncte

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore*

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
 18 februarie 2012

Clasa a VII-a

1. În triunghiul ABC cu  $m(\angle A) = 10^\circ$  și  $m(\angle B) = 100^\circ$  construim  $M \in (AB)$  și  $N \in (AC)$  astfel încât  $m(\angle MCB) = 40^\circ$  și  $m(\angle NBC) = 75^\circ$ . Să se afle  $m(\angle AMN)$ .

\*\*\*

7 puncte

2. Fie numerele raționale strict pozitive a și b. Ecuația în x,  $\sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2} \cdot ab + a + b = 0$  are soluții raționale dacă și numai dacă  $a=b$ .

7 puncte

3. Fie triunghiul ABC,  $D \in (BC)$ ,  $\frac{DB}{DC} = k$ . Atunci  $AD < \frac{k}{k+1}AC + \frac{1}{k+1}AB$

\*\*\*

7 puncte

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore*

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
 18 februarie 2012

Clasa a VIII-a

1. a. Să se rezolve în multimea numerelor naturale ecuația:  $x^2y + xy^2 = 2x^2 + 2y^2 - 32$

- b. Aflați numerele x, y, z, știind că

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2xy - 2x - z^2 = 9 \end{cases}$$

\*\*\*

7 puncte

2. Precizați dacă numărul

$5 + \sqrt{5} - 6 - \sqrt{6} - 7 - \sqrt{7} + 8 + \sqrt{8} + 9 + \sqrt{9} - 10 - \sqrt{10} - 11 - \sqrt{11} + 12 + \sqrt{12}$  este negativ, pozitiv sau nul.

7 puncte

3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și  $AB=AC=a$ . Considerăm  $MA \perp (ABC)$ ,  $MA = a\sqrt{2}$  și  $N \in AM$ , astfel încât  $m(\angle (CN, BM)) = 60^\circ$ . Să se afle lungimea segmentului  $[AN]$ .

7 puncte

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore*

Inspectoratul Școlar Județean Buzău

## Olimpiada de matematică

faza locală

Clasa a 9-a

1. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică de numere naturale astfel încât  $a_1 = 1$ .

a) Să se arate că există  $k > 1$  astfel ca  $a_k$  să fie pătrat perfect.

b) Să se arate că progresia conține o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte.

c) Să se dea un exemplu de progresie aritmetică de numere naturale care nu conține nici un pătrat perfect.

2. Să se determine numerele reale  $x, y$ , dacă

$$\begin{cases} x + [y] = 13,9 \\ [x] + 2y = 24,3 \end{cases}$$

3. Fie  $ABC$  un triunghi și  $M$  un punct în plan astfel încât

$$5\overline{AM} = 2\overline{AB} + 3\overline{AC}.$$

Să se arate că  $M$  aparține segmentului  $(BC)$ .

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore

Inspectoratul Școlar Județean Buzău

## Olimpiada de matematică

faza locală

Clasa a 10-a

1. Să se studieze monotonia funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x 3^{1-x} + 2^{1-x} 3^x$ .
2. Fie  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , cu proprietatea

$$|a| = |b| = |c| = |a + b + c|.$$

Să se arate că

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0.$$

3. Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}$  numere pozitive. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{ax + b} + \sqrt{bx + c} + \sqrt{cx + a} = \sqrt{a - bx} + \sqrt{b - cx} + \sqrt{c - ax}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore

Inspectoratul Școlar Județean Buzău

Olimpiada de matematică  
faza locală  
Clasa a 11-a

1. Fie  $A \in M_2(\mathbb{C})$  o matrice cu proprietatea

$$I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2012} = 0_2.$$

Să se arate că  $A$  este inversabilă.

2. Să se determine  $k \in \mathbb{R}$  astfel încât limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} \right)$$

să existe, să fie finită și nenulă.

3. Fie  $A \in M_n(\mathbb{C})$  o matrice astfel încât toți minorii de ordinul  $n-1$  sunt egali între ei. Să se arate că  $\det A = 0$ .

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore

Inspectoratul Școlar Județean Buzău

## Olimpiada de matematică

faza locală

Clasa a 12-a

1. Pe mulțimea  $M = \mathbb{R} - \{3\}$  se definește legea

$$x * y = 3(xy - 3x - 3y) + m,$$

unde  $m \in \mathbb{R}$ .

Să se determine toate valorile lui  $m$  pentru care  $(M, *)$  are structură de grup.

2. Să se calculeze

a)

$$\int e^{\sqrt{x}} dx.$$

b)

$$\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx.$$

3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care admite primitiva  $F$ . Să se arate că

a)  $f$  este impară  $\iff F$  este pară;

b)  $F$  este impară  $\implies f$  este pară.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore